

УДК 539.3

Левченко В.В.

Национальный университет пищевых технологий

## ПЛОСКОПОЛЯРИЗОВАННЫЕ ОБЪЕМНЫЕ ВОЛНЫ В РЕГУЛЯРНО-СЛОИСТОЙ СРЕДЕ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ НА ГРАНИЦАХ РАЗДЕЛА

В работе развит метод исследования объемных упругих волн в регулярно-слоистой среде при условии идеального проскальзывания на границах раздела слоев. Получены дисперсионные соотношения. Результаты представлены в виде дисперсионных соотношений для объемных волн и графических зависимостей.

**Ключевые слова:** регулярно-слоистая среда, плоскополяризованные волны, проскальзывание на границах раздела, дисперсионные соотношения.

Исследованию особенностей распространения волн различной физической природы в периодических структурах посвящено большое количество работ [1–6]. Основными проблемами, которым посвящены эти работы, являлось изучение условий существования объемных волн и зонного спектра их распространения. Исследование дисперсионных свойств объемных волн в регулярно-слоистых средах в настоящее время является открытым [1; 2], поэтому статья посвящена этой проблеме.

Для исследования объемных волн рассмотрим слоистую среду, которая образована периодическим повторением порождающего пакета из двух изотропных слоев. Свойства слоев характеризуются параметрами Ламе  $\lambda_q, \mu_q$ , плотностью  $\rho_q$  и толщиной  $h_q$  ( $q = 1, 2$ ). На границах раздела свойств  $z_{n,q} = 2(n-1)h_1 + h_q$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) выполняются условия идеального проскальзывания. Среда отнесена к декартовой системе координат в предположении, что ось  $\bar{1}, \bar{3}$  перпендикулярна границам раздела слоев. Гармоническая плоскополяризованная волна распространяется вдоль оси  $ox$ , а вектор смещений имеет вид  $\bar{u} = \{u(x, z, t); 0; w(x, z, t)\}$ . Компоненты  $u$  и  $w$  удовлетворяют уравнениям [3; 4]

$$\mu \Delta u(x, z, t) + (\lambda + \mu) \partial_x (\partial_x u(x, z, t) + \partial_z w(x, z, t)) = \rho \partial_t^2 u(x, z, t); \quad (1)$$

$$\mu \Delta w(x, z, t) + (\lambda + \mu) \partial_z (\partial_x u(x, z, t) + \partial_z w(x, z, t)) = \rho \partial_t^2 w(x, z, t)$$

и имеют место зависимости

$$\sigma_{xz}(x, z, t) = (\lambda + 2\mu) \partial_x u(x, z, t) + \lambda \partial_z w(x, z, t); \quad (2)$$

$$\sigma_{zz}(x, z, t) = \lambda \partial_x u(x, z, t) + (\lambda + 2\mu) \partial_z w(x, z, t).$$

Решение системы уравнений (1) выбираем в виде

$$u(x, z, t) = i[k\Phi_1(z) + \Phi'_3(z)] \exp(ikx - i\omega t); \quad (3)$$

$$w(x, z, t) = [k\Phi'_1(z) - k\Phi_3(z)] \exp(ikx - i\omega t)$$

функции  $\Phi_j(z)$  удовлетворяют уравнениям

$$\Phi''_1 + \Omega_p^2 \Phi_1 = 0, \quad \Phi''_3 + \Omega_s^2 \Phi_3 = 0. \quad (4)$$

В уравнениях (4) введены обозначения

$$\Omega_p = \sqrt{k_p^2 - k^2}, \quad \Omega_s = \sqrt{k_s^2 - k^2}, \quad k_p^2 = \omega^2/c_p^2, \quad k_s^2 = \omega^2/c_s^2,$$

$$c_p^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho, \quad c_s^2 = \mu/\rho.$$

Тогда решение волновых уравнений в слоях следует искать в виде

$$w(x, z) = \Omega_p [-A_{2(n-1)+q}^{(1)} \sin(\Omega_p \bar{z}_{n,q}) + A_{2(n-1)+q}^{(3)} \cos(\Omega_p \bar{z}_{n,q})] +$$

$$k [A_{2(n-1)+q}^{(2)} \sin(\Omega_s \bar{z}_{n,q}) + A_{2(n-1)+q}^{(4)} \cos(\Omega_s \bar{z}_{n,q})]; \quad (5)$$

$$\sigma_{zz}(x, z) = \mu(2k^2 - k_s^2) [A_{2(n-1)+q}^{(1)} \cos(\Omega_p \bar{z}_{n,q}) + A_{2(n-1)+q}^{(3)} \sin(\Omega_p \bar{z}_{n,q})] +$$

$$2\mu k \Omega_s [A_{2(n-1)+q}^{(2)} \cos(\Omega_s \bar{z}_{n,q}) - A_{2(n-1)+q}^{(4)} \sin(\Omega_s \bar{z}_{n,q})];$$

$$\sigma_{zx}(x, z) = 2\mu k \Omega_p [-A_{2(n-1)+q}^{(1)} \sin(\Omega_p \bar{z}_{n,q}) + A_{2(n-1)+q}^{(3)} \cos(\Omega_p \bar{z}_{n,q})] +$$

$$\mu(2k^2 - k_s^2) [A_{2(n-1)+q}^{(2)} \sin(\Omega_s \bar{z}_{n,q}) + A_{2(n-1)+q}^{(4)} \cos(\Omega_s \bar{z}_{n,q})].$$

В формулах (5) множитель  $\exp(ikx - i\omega t)$  опущен. На поверхностях раздела свойств выполняются граничные условия

$$\sigma_z(x, \bar{z}_{n,q} - 0) = \sigma_z(x, \bar{z}_{n,q} + 0); \quad w(x, \bar{z}_{n,q} - 0) = w(x, \bar{z}_{n,q} + 0) \quad (6)$$

и условия, вытекающие из требования идеального проскальзывания,

$$\sigma_{zx}(x, z_{nq}) = 0. \quad (7)$$

Из (7) следует, что постоянные  $A_i^{(i)}$  не могут быть произвольными, а связаны соотношениями

$$A^{(2)} = P_q^{(21)} A^{(1)} + P_q^{(23)} A^{(3)}; \quad A^{(4)} = P_q^{(43)} A^{(3)}. \quad (8)$$

В выражениях (8) введены обозначения

$$P_q^{(43)} = -(2k\Omega_{p,q})/(2k^2 - k_{s,q}^2); \quad P_q^{(21)} = (2k\Omega_{p,q} \sin \theta_{p,q})/(2k^2 - k_{s,q}^2);$$

$$P_q^{(23)} = (2k\Omega_p (\cos \theta_{p,q} - \cos \theta_{s,q})) / (2k^2 - k_{s,q}^2) \sin \theta_{s,q};$$

$$\theta_{p,q} = h_q \Omega_{p,q}; \quad \theta_{s,q} = h_q \Omega_{s,q}.$$

Используя соотношения (8), решения для  $w$  и  $\sigma_z$  можно представить таким образом:

$$w(x, z) = M_q^{11}(\Omega_{p,q}, \Omega_{s,q}, \bar{z}_q) A_{2(n-1)+q}^{(1)} + M_q^{12}(\Omega_{p,q}, \Omega_{s,q}, \bar{z}_q) A_{2(n-1)+q}^{(3)}; \quad (9)$$

$$\sigma_z(x, z) = M_q^{21}(\Omega_{p,q}, \Omega_{s,q}, \bar{z}_q) A_{2(n-1)+q}^{(1)} + M_q^{22}(\Omega_{p,q}, \Omega_{s,q}, \bar{z}_q) A_{2(n-1)+q}^{(3)},$$

где

$$\begin{aligned} M_q^{11}(\Omega_{p,q}, \Omega_{s,q}, \bar{z}_q) &= -\Omega_{p,q} \sin(\Omega_{p,q} \bar{z}_q) + k \sin(\Omega_{s,q} \bar{z}_q); \\ M_q^{12}(\Omega_{p,q}, \Omega_{s,q}, \bar{z}_q) &= \Omega_{p,q} \cos(\Omega_{p,q} \bar{z}_q) + k P^{23} \sin(\Omega_{s,q} \bar{z}_q) + k P^{43} \cos(\Omega_{s,q} \bar{z}_q); \\ M_q^{21}(\Omega_{p,q}, \Omega_{s,q}, \bar{z}_q) &= \mu[(2k^2 - k_s^2) \cos(\Omega_{p,q} \bar{z}_q) + 2k \Omega_{s,q} P^{21} \cos(\Omega_{s,q} \bar{z}_q)]; \\ M_q^{22}(\Omega_{p,q}, \Omega_{s,q}, \bar{z}_q) &= \mu[(2k^2 - k_s^2) \cos(\Omega_{p,q} \bar{z}_q) + \\ & 2k \Omega_{s,q} (P^{23} \cos(\Omega_{s,q} \bar{z}_q) - P^{43} \sin(\Omega_{s,q} \bar{z}_q))]. \end{aligned}$$

Подстановка решений (9) в граничные условия (6) позволяет свести исходную задачу к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$M_1(\Omega_{p,1}, \Omega_{s,1}, h_1) \bar{A}_{2(n-1)+1} = M_2(\Omega_{p,2}, \Omega_{s,2}, 0) \bar{A}_{2n}; \quad (10)$$

$$M_2(\Omega_{p,2}, \Omega_{s,2}, h_2) \bar{A}_{2n} = M_1(\Omega_{p,1}, \Omega_{s,1}, 0) \bar{A}_{2n+1}.$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

В системе (10) введены векторы-столбцы  $\bar{A}_{2(n-1)+i} = colon(A_{2(n-1)+i}^{(1)}, A_{2(n-1)+i}^{(3)})$  и матрицы

$$M_i(\Omega_{p,i}, \Omega_{s,i}, h_i) = \begin{bmatrix} M_i^{11}(\Omega_{p,i}, \Omega_{s,i}, h_i) & M_i^{12}(\Omega_{p,i}, \Omega_{s,i}, h_i) \\ M_i^{21}(\Omega_{p,i}, \Omega_{s,i}, h_i) & M_i^{22}(\Omega_{p,i}, \Omega_{s,i}, h_i) \end{bmatrix}$$

Непосредственные вычисления позволяют показать, что детерминант передаточной матрицы порождающего пакета слоев

$$Mp = M_2(\Omega_{p,2}, \Omega_{s,2}, h_2) M_2^{-1}(\Omega_{p,2}, \Omega_{s,2}, 0) M_1(\Omega_{p,1}, \Omega_{s,1}, h_1) M_1^{-1}(\Omega_{p,1}, \Omega_{s,1}, 0)$$

равен единице, и характеристическое уравнение запишется в виде

$$\chi^2 - 2b_2 \chi + 1 = 0, \quad b_2 = spur Mp / 2.$$

Решение системы уравнений (10) ищем в виде [3; 4]:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{2n-1} &= \sum_{j=1}^2 K_j \chi_j^n M_2^{-1}(\Omega_{p,2}, \Omega_{s,2}, 0) M_1(\Omega_{p,1}, \Omega_{s,1}, h_1) M_1^{-1}(\Omega_{p,1}, \Omega_{s,1}, 0) \bar{Y}_j; \\ \bar{A}_{2n} &= \sum_{j=1}^2 K_j \chi_j^n M_2^{-1}(\Omega_{p,2}, \Omega_{s,2}, 0) \bar{Y}_j. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $Y_j$  – собственные векторы передаточной матрицы  $Mp$ .

Требование ограниченности решений (11) при  $n \rightarrow \pm\infty$  позволяет получить условие существования обменных волн в рассматриваемой структуре  $|b_2| = 1$ . Границы зон пропускания

$$b_2 = 1 \quad (12)$$

$$b_2 = -1 \quad (13)$$

являются дисперсионными соотношениями для объемных волн. Формы колебаний на границах зон пропускания линейно- и плоскополяризованных волн исследовались в работах [5; 6]. В этих работах показано, что колебания, соответствующие дисперсионному соотношению (12), имеют периодом порождающий пакет, а колебания, соответствующие (13), имеют периодом два пакета. С целью получения дисперсионных соотношений, которые соответствуют колебаниям

с периодом  $m$  пакетов, выполним вычисления, подобные проведенным выше, предположив, что порождающий пакет имеет  $2m$  слоев. Дисперсионное соотношение в этом случае будет таким:

$$spur(MP^m) / 2 = 1. \quad (14)$$

Используя формулу Абелеса [1; 2], последнее соотношение можно переписать в виде  $b_2 U_{m-1} - U_{m-2} = 1$ , где  $U_m(b_0)$  – полиномы Чебышева второго рода  $U_n^{(0)}$ -го порядка. Используя рекуррентное соотношение  $U_{L-1}^2(b_0) - 2b_0 U_{L-1}(b_0) U_{L-2}(b_0) + U_{L-2}^2(b_0) = 1$ , которое является следствием унимодулярности матрицы  $Mp$ , дисперсионное соотношение (14) можно свести к виду

$$b_0 = \cos(l\pi / m). \quad (15)$$

$$l = 0, 1, \dots, m$$

Как следует из вида уравнений (15), в каждой зоне пропускания  $-1 \leq b_0 \leq 1$  локализовано  $m$  дисперсионных кривых периодов колебаний, которых будет  $2m$  слоев. Эти дисперсионные кривые следует характеризовать набором из трех индексов  $(s, l, m)$ , где  $s$  – номер зоны пропускания. Типы колебаний  $(s, l, m)$  и  $(s, pl, pm)$  совпадают ( $p$  – целое число), колебания  $(s, l, m)$  и  $(s, l, m - l)$  вырождены. В общем случае анализ выражений (15) возможен только численно.

Числовые результаты. Численный анализ дисперсионных соотношений (15) проводился при таких параметрах слоев:  $v_1 = 0,35$ ,  $v_2 = 0,3$ ,  $E_2/E_1 = 20$ ,  $\rho_2/\rho_1 = 2$ ,  $h_1/h = 0,5$ ,  $h_2/h = 0,5$  ( $v_i$  – коэффициенты Пуассона,  $E_i$  – модули Юнга,  $h = h_1 + h_2$ ). Результаты расчетов при  $m = 4$  и  $l = 1$  наведены в безразмерных координатах  $\bar{\omega} = \omega h / c_{s,1}$ ,  $\bar{k} = kh$  на рис. 1.

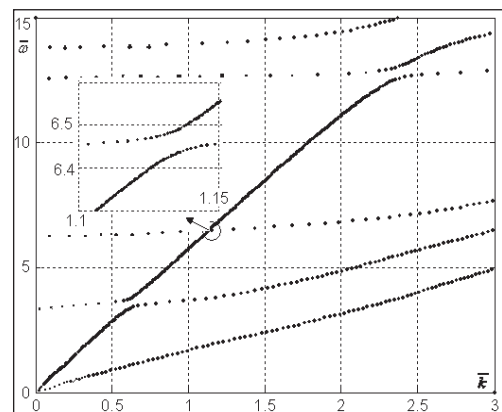


Рис. 1. Результаты расчетов

Из результатов, представленных на графике, следует, что имеются диапазоны частот, в которых происходит расталкивание дисперсионных кривых. После расталкивания дисперсионные

кривые обмениваются углами наклона. Особенности расталкивания и иллюстрирует вставка на рисунке. Для рассматриваемых исходных данных диапазоны расталкивания лежат на одной прямой.

Более полное представление о волновом процессе в структуре дает изучение форм колебаний. На рис. 2–4 в координатах  $\bar{z} = z/h$ ,  $\bar{w} = w(z)/w(0)$  представлены формы колебаний. Значения  $\bar{k}$  и  $\bar{\omega}$ , для которых выполнялся анализ колебаний, нанесены на рисунках. На рис. 2 приведены формы колебаний для частот второй моды до расталкивания дисперсионных кривых и после. Распределение перемещений по слоям приведены на рис. 3 для мод с  $s = 3, 4, 5$ .

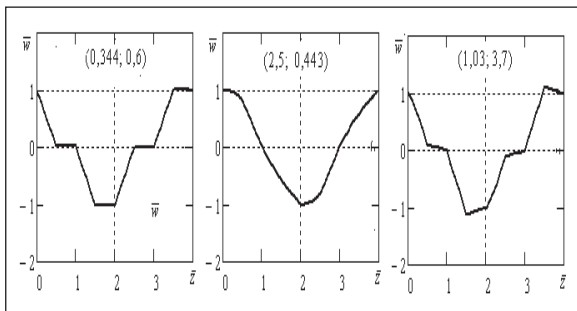


Рис. 2. Формы колебаний для частот второй моды,  $m = 4$ ,  $l = 1$

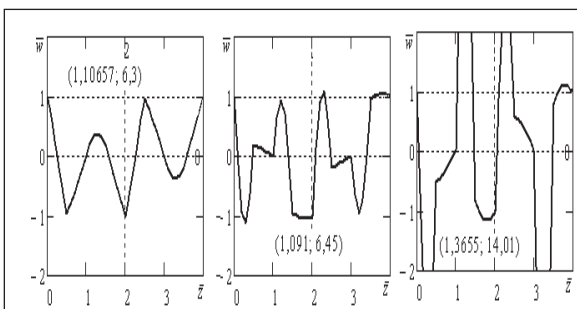


Рис. 3. Формы колебаний для частот третьей-пятой моды,  $m = 4$ ,  $l = 1$

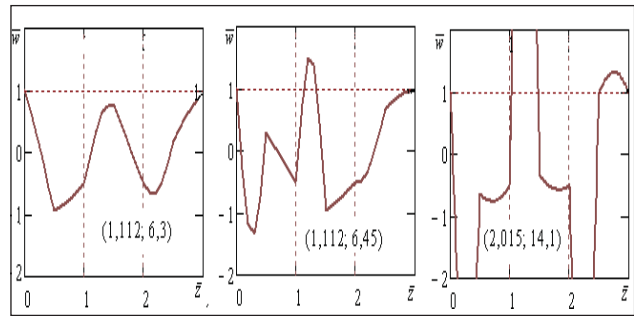


Рис. 4. Формы колебаний для частот третьей-пятой моды,  $m = 3$ ,  $l = 2$

Как показали численные эксперименты, при четном значении  $m$  формы колебаний обладают симметрией, которая подчиняется правилу  $w(\frac{h}{2}m - z) = -w(hm - z)$ ,  $0 \leq z \leq \frac{z}{2}mh$ , а также правилу  $w(sh) = 0$ , где  $s = 1, 3, \dots$ . Дисперсионные кривые в этом случае подобны показанным на рис. 1, поэтому на отдельном рисунке не представлены. Анализ проводился для мод, совпадающих с модами на рис. 2, и близких значений частот. Как следует из рисунков, формы колебаний и симметрия существенно отличаются от колебаний, представленных на рис. 2, несмотря на совпадение мод и близость частот. При  $m$  нечетном отсутствует симметрия, присущая колебаниям при  $m$  четном. С ростом значения  $m$  формы колебаний на расстоянии  $mh$  становятся более сложными.

В статье приведена постановка задачи о распространении плоскополяризованных волн в регулярно-слоистой структуре при проскальзывании на границах раздела слоев. Получены дисперсионные соотношения для объемных волн. Численно исследованы формы колебаний и их симметричность относительно пакетов порождающих слоев для разных мод.

#### Список литературы:

1. Баас Ф.Г. Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками / Ф.Г. Баас, А.А. Булгаков, А.П. Тетервов. – М. Наука, 1989. – 288 с.
2. Борн М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф – М.: Наука, 1970. – 886 с.
3. Шульга Н.А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. / Н.А. Шульга К.: Наук думка, 1982. – 200 с.
4. Levchenko V.V. Propagation of magnetoelastic shear waves through a regularly laminated medium with metalized interfaces / V.V. Levchenko // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, № 1. – P. 97–25.
5. Levchenko V.V. Mode shapes at the boundaries of the transmission zones for plane-polarized bulk waves in a regularly layered medium / V.V. Levchenko, A.N. Podlipenets and N.A. Shul`ga B.B. // Int. Appl. Mech. – 1985. – 21, № 1 – P. 13–16.
6. Levchenko V.V. Mode Shapes at The boundaries of the transmission zones for Shear bulk waves V.V. Levchenko, A.N. Podlipenets and N.A. Shul`ga // Prikl. Mech/ – 1984. – 20, № 11. – P. 38–45.

**ПЛОСКОПОЛЯРИЗОВАНІ ОБ'ЄМНІ ХВИЛІ В РЕГУЛЯРНО-ШАРУВАТОМУ СЕРЕДОВИЩІ ІЗ ПРОСЛИЗАННЯМ НА МЕЖАХ РОЗДІЛУ**

*У статті розвинений метод дослідження об'ємних плоскополяризованих пружних хвиль у регулярно-шаруватому середовищі за умови ідеального прослизання на межах розділу шарів. Отримані дисперсійні співвідношення. Результати представлені у вигляді дисперсійних співвідношень для об'ємних хвиль і графічних залежностей.*

**Ключові слова:** *регулярно-шарувате середовище, плоскополяризовані хвилі, прослизання на межах розділу, дисперсійні співвідношення.*

**FLAT-LEAVED VOLUME WAVES IN THE REGULARLY-STRATIFIED ENVIRONMENT WITH SLIPPING ON BORDERS OF DIVISION**

*The method of research of by volume resilient waves is in-process developed in the regularly-stratified environment on condition of the ideal slipping on the borders of division of layers. Dispersible correlations are got. Results are presented as dispersible correlations for by volume waves and graphic dependences.*

**Key words:** *regularly-stratified environment, flat-leaved waves, slipping on the borders of division, dispersible correlations.*